Tschebyscheffsche Ungleichung

a) Zeigen Sie die folgende Identität: Für $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ und $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{i,k=1}^{n} (a_i - a_k)(b_i - b_k) = 2\left\{ n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)\right\}$$

b) Leiten Sie aus a) die Tschebyscheffsche Ungleichung her: Ist $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ und $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$, so gilt

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n}{n}$$